Applications des développements limités

- Calculs de limites
- Position d'une courbe par rapport à sa tangente
- Développement limité en $+\infty$ » **Asymptotes** »

Calculs de limites

$f(x)$

$$= \frac{\sin x - \arcsin x}{\sin^3 x}$$

Le *d.l.* du dénominateur ayant son premier terme non nul de degré 3, on cherche un *d.l.* d'ordre 3 du numérateur. Pour obtenir le *d.l.* d'$\arcsin x$, on part du *d.l.* d'ordre 2 de la dérivée. On a

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)\,.$$

Donc en intégrant, et puisque $\arcsin 0 = 0$,

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)\,.$$

Alors

$$\sin x - \arcsin x = \left(x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)\right) - \left(x + \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)\right) = -\frac{x^3}{3} + \circ(x^3) \sim -\frac{x^3}{3}\,,$$

et

$$\sin^3 x \sim x^3\,,$$

d'où

$$\frac{\sin x - \arcsin x}{\sin^3 x} \sim -\frac{1}{3}\,,$$

et

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \arcsin x}{\sin^3 x} = -\frac{1}{3}\,.$$

Calculs de limites

$$) = \frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x}$$

Le *d.l.* du dénominateur ayant son premier terme non nul de degré 3, on cherche un *d.l.* d'ordre 3 du numérateur. Pour obtenir le *d.l.* d'$\arcsin x$, on part du *d.l.* d'ordre 2 de la dérivée. On a

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)\,.$$

Donc en intégrant, et puisque $\arcsin 0 = 0$,

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)\,.$$

Alors

$$x - \arcsin x = -\frac{x^3}{6} + \circ(x^3) \sim -\frac{x^3}{6}\,,$$

et

$$\sin^3 x \sim x^3\,,$$

d'où

$$\frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x} \sim -\frac{1}{6}\,,$$

et

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x} = -\frac{1}{6}\,.$$

Calculs de limites

$$f(x) = \frac{8^x - 4^x}{3^x - 2^x}$$

On part du *d.l.* d'ordre 1 en zéro de $\alpha^x = e^{x \ln \alpha}$ qui vaut $1 + x \ln \alpha + \circ(x)$. On a donc

$$8^x - 4^x = (1 + x \ln 8) - (1 + x \ln 4) + \circ(x) = x \ln 2 + \circ(x) \sim x \ln 2\,,$$

et

$$3^x - 2^x = (1 + x \ln 3) - (1 + x \ln 2) + \circ(x) = x \ln \frac{3}{2} + \circ(x) \sim x\ \ln \frac{3}{2}\,,$$

donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{8^x - 4^x}{3^x - 2^x} = \frac{\ln 2}{\ln(3/2)}\,.$$

Calculs de limites

$$f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1/x}$$

d) Comme dans le calcul figure une division par x, on part de *d.l.* à l'ordre 1. On a tout d'abord

$$\frac{1-x}{1+x} = (1-x)(1-x+\circ(x)) = 1-2x+\circ(x)\,,$$

puis

$$\frac{1}{x}\ln\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{x}\ln(1-2x+\circ(x)) = \frac{1}{x}(-2x+\circ(x)) = -2+\circ(1)\,.$$

Alors

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1/x} = \lim_{x\to 0}\exp\left[\frac{1}{x}\ln\frac{1-x}{1+x}\right] = e^{-2}$$

Calculs de limites

$$f(x) = \frac{\ln(\cos x \;\mathrm{ch}\, x)}{x^4}$$

En raison de la division par x^4, on cherche un *d.l.* d'ordre 4 du numérateur. On a

$$\begin{aligned} \cos x \;\mathrm{ch}\, x &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^4)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^4)\right) \\ &= 1 - \frac{x^4}{6} + \circ(x^4)\,. \end{aligned}$$

Alors

$$\ln(\cos x \;\mathrm{ch}\, x) = -\frac{x^4}{6} + \circ(x^4)\,,$$

donc

$$f(x) = -\frac{1}{6} + \circ(1)\,,$$

et

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x \;\mathrm{ch}\, x)}{x^4} = -\frac{1}{6}\,.$$

Calculs de limites

$$f(x) = \frac{\operatorname{sh} x + \sin x - 2x}{x(\operatorname{ch} x + \cos x - 2)}$$

On cherche un équivalent du dénominateur. Compte tenu des *d.l.* de $\cos x$ et de $\operatorname{ch} x$, on constate qu'il faut partir à l'ordre 4, car

$$\operatorname{ch} x + \cos x - 2 = \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^4)\right) + \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^4)\right) - 2 = \frac{x^4}{12} + \circ(x^4)\,.$$

Le dénominateur est donc équivalent à $x^5/12$. On cherche alors un *d.l.* d'ordre 5 du numérateur

$$\operatorname{sh} x + \sin x - 2x = \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \circ(x^5)\right) + \left(1 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \circ(x^5)\right) - 2x = \frac{x^5}{60} + \circ(x^5)\,,$$

donc le numérateur est équivalent à $x^5/60$. Alors

$$f(x) \sim \frac{x^5/60}{x^5/12} = \frac{1}{5}\,,$$

et

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x + \sin x - 2x}{x(\operatorname{ch} x + \cos x - 2)} = \frac{1}{5}\,.$$

Calculs de limites

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}$$

On a

$$f(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2},$$

et en raison de la division par x^2, on part d'un *d.l.* d'ordre 2 du numérateur, ce qui donne

$$x - \ln(1+x) = x - \left(x - \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)\right) = \frac{x^2}{2} + \circ(x^2),$$

donc

$$f(x) = \frac{1}{2} + \circ(1),$$

et

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Calculs de limites

$$f(x) = \frac{\sin x - x}{x\ln(1-x^2)}$$

d) Puisque

$$x\ln(1-x^2) = -x^3 + \circ(x^3),$$

le premier terme non nul du dénominateur est de degré 3. On part de *d.l.* d'ordre 3 du numérateur. On a

$$\sin x - x = \left(x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)\right) - x = -\frac{x^3}{6} + \circ(x^3),$$

donc

$$f(x) = \frac{-\frac{x^3}{6} + \circ(x^3)}{-x^3 + \circ(x^3)}$$

et

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x\ln(1-x^2)} = \frac{1}{6}.$$

Calculs de limites

$$f(x) = (\cos x)^{1/x^2}$$

$$(\cos x)^{1/x^2} = \exp \frac{\ln \cos x}{x^2} .$$

En raison de la division par x^2, on commence par un *d.l.* d'ordre 2 de $\ln \cos x$. On a

$$\ln \cos x = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)\right) = -\frac{x^2}{2} + \circ(x^2) ,$$

et

$$f(x) = \exp\left(-\frac{1}{2} + \circ(1)\right) ,$$

donc

$$\lim_{x \to 0} (\cos x)^{1/x^2} = e^{-1/2} .$$

Position d'une courbe par rapport à sa tangente

$$f(x) = \frac{e^{-x} - 1}{x}$$

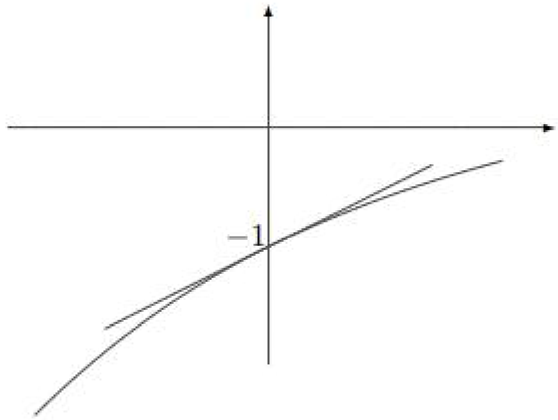
On a

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3),$$

d'où

$$f(x) = -1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + \circ(x^2).$$

La fonction f se prolonge en zéro par la valeur -1.



L'équation de la tangente à la courbe en 0 est donnée par le *d.l.* d'ordre 1

$$y = -1 + \frac{x}{2}.$$

Alors

$$f(x) - \left(-1 + \frac{x}{2}\right) = -\frac{x^2}{6} + \circ(x^2) \sim -\frac{x^2}{6}.$$

Lorsque x tend vers 0 la différence est négative et la courbe est en dessous de sa tangente.

Position d'une courbe par rapport à sa tangente

$$3\ln(1+x)-\ln(1+x^3)=3\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)-x^3+\circ(x^4)=3x-\frac{3x^2}{2}-\frac{3x^4}{4}+\circ(x^4),$$

d'où

$$f(x)=1-\frac{x}{2}-\frac{x^3}{4}+\circ(x^3).$$

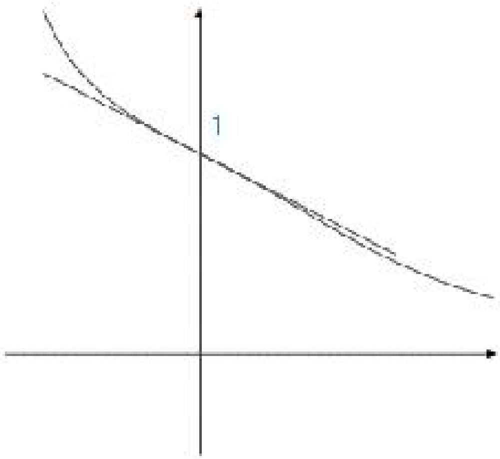
La fonction f se prolonge en zéro par la valeur 1. L'équation de la tangente à la courbe en 0 est donnée par le *d.l.* d'ordre 1 :

$$y=1-\frac{x}{2}.$$

Alors

$$f(x)-\left(1-\frac{x}{2}\right)=-\frac{x^3}{4}+\circ(x^3)\sim-\frac{x^3}{4}.$$

Lorsque x tend vers 0^+ la différence est négative et la courbe est en dessous de sa tangente, lorsque x tend vers 0^- la différence est positive et la courbe est au-dessus de sa tangente. La courbe admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0.



Asymptotes

$$g(x) = x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

Posons $u = 1/x$. Pour $x \to +\infty$, u est voisin de 0. On a

$$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3),$$

soit

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o(x^{-3})\right) \\ &= x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Autrement dit, la droite d'équation $y = x - 1/2$ est asymptote à la courbe représentative de g au voisinage de $+\infty$ et la courbe est au-dessus de son asymptote (au voisinage de l'infini).

Existence

En la justifiant, donner la réponse aux questions suivantes :

a) La fonction $x \mapsto \ln x$ a-t-elle un développement limité en zéro ?

b) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ a-t-elle un développement limité d'ordre 1 en zéro ?

c) La fonction $x \mapsto \sqrt{x^5}$ possède-t-elle un développement limité en zéro d'ordre 1 ? d'ordre 2 ? d'ordre 3 ?

d) La fonction $x \mapsto e^{-1/x^2}$ possède-t-elle un développement limité en zéro d'ordre n ?

Existence

a) La fonction $x \mapsto \ln x$ n'a pas de limite finie en zéro, donc pas de *d.l.* d'ordre 0, ni d'aucun autre ordre.

b) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en zéro, donc n'a pas de *d.l.* d'ordre 1 en zéro, ni d'aucun ordre supérieur à 1.

c) On a

$$\sqrt{x^5} = x^2\sqrt{x} = \circ(x^2)\,,$$

donc la fonction possède des *d.l.* d'ordre 1 et 2 en zéro. Si elle possédait un *d.l.* d'ordre 3, il serait de la forme

$$\sqrt{x^5} = ax^3 + \circ(x^3)\,,$$

et l'on aurait

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^5}}{x^3} = a\,,$$

ce qui n'est pas le cas, puisque cette limite est infinie. Donc la fonction ne possède pas de *d.l.* d'ordre 3 en zéro.

Existence

d) On a, pour tout entier n positif,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} e^{-1/x^2} = 0\,,$$

donc

$$e^{-1/x^2} = \circ(x^n)\,.$$

La fonction possède un *d.l.* d'ordre n pour tout entier n.