Exercices(Limites)

Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

a) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2\,|x|}{x}$ b) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+2\,|x|}{x}$ c) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3\,x+2}$

d) $\lim_{x\to \pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ e) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$ f) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$

1. $\frac{x^2+2|x|}{x} = x + 2\frac{|x|}{x}$. *Si* $x > 0$ *cette expression vaut* $x+2$ *donc la limite à droite en* $x = 0$ *est* $+2$. *Si* $x < 0$ *l'expression vaut* -2 *donc la limite à gauche en* $x = 0$ *est* -2. *Les limites à droite et à gauche sont différentes donc il n'y a pas de limite en* $x = 0$.
2. $\frac{x^2+2|x|}{x} = x + 2\frac{|x|}{x} = x - 2$ *pour* $x < 0$. *Donc la limite quand* $x \to -\infty$ *est* $-\infty$.
3. $\frac{x^2-4}{x^2-3\,x+2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{x+2}{x-1}$, *lorsque* $x \to 2$ *cette expression tend vers* 4.
4. $\frac{\sin^2 x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x} = 1 - \cos x$. *Lorsque* $x \to \pi$ *la limite est donc* 2.
5. $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} \times \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+x-(1+x^2)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})} = \frac{x-x^2}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})} = \frac{1-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}$. *Lorsque* $x \to 0$ *la limite vaut* $\frac{1}{2}$.
6. $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = \left(\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}\right) \times \frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}} = \frac{x+5-(x-3)}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}} = \frac{8}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}$. *Lorsque* $x \to +\infty$, *la limite vaut* 0.

Exercices (Continuité dérivabilité)

Soit $f :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}$$

Déterminer la limite de f, si elle existe, en 0.

On va multiplier par l'expression conjuguée.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}} = \frac{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}{\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)} = \frac{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}{1+x^2-(1+x)}$$

$$= \frac{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}{x^2-x} = \frac{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}{x(x-1)} = \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}}{x-1}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}}{x-1} = -2$$

Deuxième méthode

On va utiliser la règle de L'Hospital, on pose

$$g(x) = x \quad \text{et} \quad h(x) = \sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}$$

$$g'(x) = 1 \quad \text{et} \quad h'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{g'(x)}{h'(x)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{1}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}}} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

Par conséquent

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{g(x)}{h(x)} = -2$$

Exercices (Continuité dérivabilité)

Les fonctions f, g et $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = x|x|; \quad h(x) = \cos\left(\sqrt{|x|}\right)$$

Sont-elles dérivables en 0 ?

$$f(0) = 0$$

Donc

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x|x|}{x} = |x|$$

Et alors

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} |x| = 0$$

Par conséquent f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

Exercices (Continuité dérivabilité)

Les fonctions f, g et h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = x|x|; \quad h(x) = \cos\left(\sqrt{|x|}\right)$$

Sont-elles dérivables en 0 ?

Si $x < 0$, on pose $h = \sqrt{-x} = \sqrt{|x|}$, donc $x = -h^2$

$$\frac{\cos\left(\sqrt{|x|}\right) - 1}{x} = \frac{\cos(h) - 1}{-h^2} = \frac{1 - \cos(h)}{h^2}$$

Maintenant il vaut mieux se souvenir du résultat connu en terminale qui dit que

$$\lim_{h \to 0} \frac{1 - \cos(h)}{h^2} = \frac{1}{2}$$

Sinon, il faut appliquer la règle de L'Hospital deux fois de suite.

Donc

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\cos\left(\sqrt{|x|}\right) - 1}{x} = \frac{1}{2}$$

Si $x > 0$, on pose $h = \sqrt{x} = \sqrt{|x|}$ donc $x = h^2$

$$\frac{\cos\left(\sqrt{|x|}\right) - 1}{x} = \frac{\cos(h) - 1}{h^2} = -\frac{1 - \cos(h)}{h^2}$$

Avec le même résultat

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos\left(\sqrt{|x|}\right) - 1}{x} = -\frac{1}{2}$$

Exercices (Continuité dérivabilité)

Soit a et b deux nombres réels. On définit la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ par

$$x \to \begin{cases} ax+b & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Donner une condition sur b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer a et b tels que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$ et dans ce cas calculer $f'(0)$.

1. Si $x \neq 0$, f est continue.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} ax+b = b = f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+x} = 1$$

   Donc f est continue si et seulement si $b = 1$.

2. Si $x \neq 0$ alors f est dérivable. Si $x \neq 0$

   Si $x < 0$ alors $f'(x) = a$, si $x > 0$ alors $f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$ et

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{(1+x)^2} = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) \Leftrightarrow -1 = a$$

   Si $b = 1$ et si $a = -1$ alors f est continue en 0 et

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x)$$