Université Sultan Moulay Slimane
Faculté Polydisciplinaire
Béni Mellal

جـــامعة السلطـــان مـولاي سليمـــان
الكليـة المتعددة التخصصـات
بنـي مـلال

FILIERE : SEG– S1 FEUILLE DE TD N° 1 Année: 2018-2019
ANALYSE MATHEMATIQUE

Exercice 1 (limites)

Donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions f suivantes :

$f_1(x) = e^x - x^2$, $f_2(x) = \frac{\ln(x)}{x^2+5x+7}$, $f_3(x) = \sqrt{x^2}$, $f_4(x) = x^{1/x}$

$f_5(x) = \sqrt{x^2+x+1}$ $f_6(x) = \frac{1}{x^x}$, $f_7(x) = \frac{x^2-2x+1}{x-1}$

$f_8(x) = \ln(x) - x$ $f_9(x) = \frac{\ln(x^2+2)}{2x}$ $f_{10}(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$

Exercice 2 **(**Théorème de l'HÔPITAL - F.I.0/0)

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to1} \frac{\ln(x)}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to0} \frac{2-2e^x}{x^2}$ d) $\lim\limits_{x\to0} \frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^3}$

Exercice 3

Calculer les dérivées des fonctions :

a) $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ b) $x^3\sin(x)$ c) $\sin(x)\cos(x)$ d) e^{x^2-3}

e) $\frac{x^2+3}{x^3+3x-7}$ f) $x^2\tan(x)$ g) $ln(x^2+1)$ h) $4x^3+2x-1$

Exercice 4

Soit f l'application définie sur R dont le tableau de variations est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

Alors l'expression de f peut être …….

- $f_1(x) = \text{I}x\text{I} + 1$ $\quad f_2(x) = e^x - x$ $\quad f_3(x) = \frac{x^2+1}{\text{I}x\text{I}+1}$
- $f_4(x) = \sqrt{x^2+1}$ $\quad f_5(x) = \ln(\ x^2+1)$

Exercice 5

Trouvez les extrema locaux et globaux de la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x - k\sqrt{x}$ où k est une constante positive.

Exercice 6

On considère la fonction f(x) définie comme suit :

$$\begin{cases} f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 27 \ \ pour\ x \geq 2 \\ f(x) = \dfrac{x^2-3}{x-2} \qquad\qquad pour\ x < 2 \end{cases}$$

1) Donner le domaine de définition de la fonction et calculer les limites aux bornes
2) F(x) est-t-elle continue au point d'abscisse 2 ?
3) *f(x)* admet-elle des asymptotes ?
4) Etudier la concavité de la fonction ?
5) Etablir le tableau de variation de la fonction et tracer son graphe.

Eléments de corrigé

Exercice 1

Questions : donner l'ensemble de définition pour chacune de définitions suivantes :

Rappel : il y a quatre type d'expression qui pose problème pour déterminer l'ensemble de définition d'une fonction **:**

1er cas : l'expression de *f* est de la forme *f(x) =ln(g(x)), f* est définie lorsque *g(x)* > 0 (*g(x)* doit être strictement positive)

2ème cas : l'expression de *f* est de la forme $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, *f* est définie lorsque *h(x)* ≠ 0

3ème cas : l'expression de *f* est de la forme $f(x) = \sqrt{h(x)}$, *f* est définie lorsque *h(x) ≥ 0*

***4ème cas** :* l'expression de *f* est de la forme $f(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{h(x)}}$, *f* est définie lorsque *h(x) > 0*

Dans les autres cas, les fonctions sont en générale définie sur $\mathbb{R}$

1. $f_1(x) = e^x - x^2$, dans cette fonction on a aucune contrainte , alors $D_f = \mathbb{R}$

2. $f_2(x) = \frac{\ln(x)}{x^2+5x+7}$, la fonction $f_2(x)$ et definie ssi $x > 0$ et $x^2 + 5x + 7 \neq 0$

Donc $D_{f1} = \{x \in \mathbb{R} \;\; x > 0 \;\; et \; x^2 + 5x + 7 \neq 0\}$

L'étape suivante consiste à chercher les racines du trinôme ($x^2 + 5x + 7 = 0$) qui se trouve au dénominateur.

Soit $\Delta = b^2 - 4ac \iff \Delta = 5^2 - 4(1)7 = -3 < 0$ d'où pas de solution dans $\mathbb{R}$ alors pour $x^2 + 5x + 7 \neq 0$, $S_1 = \mathbb{R}$.

-Pour $x > 0$ $S_2 =]0, +\infty[$ Donc $D_{f_2} = S_1 \cap S_2 = \mathbb{R} \cap]0, +\infty[=]0, +\infty[$

Alors $D_{f_2} =]0, +\infty[$

3. $f_3(x) = \sqrt{x^2}$ est définie si seulement si $x^2 \geq 0$. On cherche donc les réels x tels que $x^2 \geq 0$

Cette inégalité est toujours vérifiée et donc le domaine de définition de la fonction $f_3(x) = \sqrt{x^2}$ est $\mathbb{R}$. $D_{f_3} = \mathbb{R}$

4. $f_4(x) = x^{1/x}$

Rappel : $a^x = e^{lna^x} = e^{xlna}$ et $lnx^a = xlna$

$On\ a\ \ f_4(x) = x^{1/x} = e^{lnx^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{1}{x}lnx}$ alors $D_{f_4} = \{x \in \mathbb{R} \;/ x \neq 0 \;\; et \;\; x > 0 \}$

$= \{x \in \mathbb{R} \;/\; x > 0 \}$

$D_{f_4} =]0, +\infty[$

5. $f_5(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ est défini si et seulement si $x^2 + x + 1 \geq 0$. On cherche donc les réels x tels que : $x^2 + x + 1 \geq 0$. Pour $x^2 + x + 1 = 0$ on a $\Delta = 1^2 - 4(1)1 = -3 < 0$ d'où pas de solution dans $\mathbb{R}$, alors pour $x^2 + 5x + 7 \neq 0$, $D_{f_5} = \mathbb{R}$.

6. On a $f_6(x) = \frac{1}{x^x} = \frac{1}{e^{lnx^x}} = \frac{1}{e^{xlnx}}$

$D_{f_6} = \{x \in \mathbb{R} \;/ e^{xlnx} \neq 0 \;\; et \;\; x > 0 \}$ or $x \in \mathbb{R} \;\; x \to e^x$ est toujours positive.

Donc $D_{f_6} = \{x \in \mathbb{R} \;/\; x > 0 \} =]0, +\infty[$

7. $f_7(x) = \frac{x^2-2x+1}{x-1}$ est définie si seulement si $x - 1 \neq 0$ alors :

$D_{f_7} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x - 1 \neq 0 \} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 1 \}$

$D_{f_7} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

8. $f_8(x) = \ln(x) - x$ *est définie si seulement si* $x > 0$. L'ensemble de définition de la fonction $f_8(x)$ est $D_{f_8} =]0, +\infty[$.

9. $f_9(x) = \frac{\ln(x^2+2)}{2x}$ on remarque tout d'abord que $\ln(x^2+2)$ est définie si seulement si $x^2+2>0$ c'est-à-dire si et seulement si $x^2>2$. De même le dénominateur ($2x \neq 0$) ne doit jamais s'annuler, ce qui exclut la valeur 0 du domaine de définition.

Donc l'ensemble de définition est donc $D_{f_8} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

10. $f_{10}(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$ *est définie si seulement si* $x^2+1 \neq 0$ ou $x^2 \neq 1$. Donc l'ensemble de définition de la fonction $f_{10}(x)$ est $D_{f_{10}} = \mathbb{R}$.

Exercice 2 (Théorème de l'hôpital)

<u>Rappel</u> : *Soit f et g deux fonctions à valeurs réelles, dérivables, sur]0, η]. On suppose que g et g ' ne s'annulent pas sur]0, η].*
On suppose que la fraction $\frac{f(x)}{g(x)}$ *se présente pour* $x \to a$ *soit sous la forme indéterminée* $\frac{0}{0}$ *soit sous la forme interminée* $\frac{+\infty}{+\infty}$. *Alors :* $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.
Sous la condition que l'on connaisse l'existence de la deuxième limite, celle-ci pouvant être infinie.

a. $\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{0}{0}$ *Nous allons lever ce cas d'indétermination en appliquant la règle de l'hôpital plusieurs fois de suite jusqu'à ce que nous obtenions une solution qui soit zéro, soit un nombre réel, soit +/- infini.*

D'après la règle de l'hôpital $\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(\ln(x))'}{(x-1)'}$
$= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}$

$= \lim_{x\to 1}\frac{1}{x}$

Par ailleurs, un calcul simple montre que : $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x} = 1$

Donc $\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1} = 1$

b. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}$ $=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(0)}{0} = \frac{0}{0}$ *forme indéterminée*
donc d'après la règle de l'hopital $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}$

à ce stade, si on remplace x par 0, nous allons à nouveau obtenir la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ ($\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 0}{20} = \frac{0}{0}$) *c'est pourquoi on appliquons une deuxième fois la règle de l'hôpital on obtient :*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}.$$

Donc $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

c. $\lim_{x\to 0}\frac{2-2e^x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2-2e^0}{0^2}=\frac{0}{0}$ *On obtient une forme indéterminée. D'où l'application de la règle de l'hôpital* : $\lim_{x\to 0}\frac{2-2e^x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(2-2e^x)'}{(x^2)'}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2e^x}{2x}$$

$$=-\infty$$

d. $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{0\cos(0)-\sin(0)}{0^3}=\frac{0}{0}$ *On obtient une forme indéterminée.*

D'où l'application de la règle de l'hôpital :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(x\cos(x)-\sin(x))'}{(x^3)'}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to 0}\frac{(x\cos(x)-\sin(x))'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos(x)-x\sin(x))-\cos(x)}{3x^2}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{(x\cos(x)-\sin(x))'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin(x)}{3x^2}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)}{3x}=\frac{0}{0}$$

On obtient une forme indéterminée. On appliquant une deuxième fois la règle de l'hôpital on obtient :

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{(-\sin(x))'}{(3x)'}\Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{3}=\frac{1}{3}$$ (D'après un calcule simple)

Donc $$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^3}=\frac{1}{3}$$

Exercice 3

Calculons les dérivées suivantes.

a. $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ pour dériver cette fonction on utilise la formule suivante : $(\frac{1}{f})'=\frac{-f'}{f^2}$

$$(\frac{1}{\sqrt{x^3}})' = \frac{-(\sqrt{x^3})'}{(\sqrt{x^3})^2} = \frac{-\frac{(x^3)'}{2\sqrt{x^3}}}{x^3} = \frac{-\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3}}}{x^3} = -\frac{3x^2}{2x^3\sqrt{x^3}} = -\frac{3}{2x\sqrt{x^3}}$$

b. $x^3\sin(x)$ Pour dériver cette fonction on mobilise la formule suivante : $(f.g)' = (f'.g) + (g'.f)$

$$(x^3\sin(x))' = ((x^3)'.sinx) + (x^3.(sinx)')$$
$$= 3x^2 sinx + x^3 cosx$$

c. $\sin(x)\cos(x)$

$$(\sin(x)\cos(x))' = (sinx)'.cosx + sinx.(cosx)'$$
$$= cosx.cosx + sinx.(-sinx)$$
$$= cos^2x - sins^2x$$

d. e^{x^2-3} pour la dérivation de cette fonction, on utilise la formule suivante : $(e^{f(x)})' = f(x)'e^{f(x)}$

$$(e^{x^2-3})' = (x^2-3)'e^{x^2-3}$$
$$= 2xe^{x^2-3}$$

e. $\frac{x^2+3}{x^3+3x-7}$ ici on applique la formule : :$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$

$$(\frac{x^2+3}{x^3+3x-7})' = \frac{(x^2+3)'(x^3+3x-7)-(x^2+3)(x^3+3x-7)'}{(x^3+3x-7)^2}$$

$$= \frac{2x(x^3+3x-7)-(x^2+3)(3x^2+3)}{x^3+3x-7}$$

Après simplification, on a :

$$(\frac{x^2+3}{x^3+3x-7})' = \frac{3x^2-20x-9}{(x^2+3x-7)^2}$$

f. $x^2\tan(x)$. (formule : $(f.g)' = (f'.g) + (g'.f)$)

$$(x^2\tan(x))' = (x^2)'\tan(x) + x^2(\tan x)'$$
$$= 2\,xtan(x) + x^2(1+tan^2x)$$

g. $ln(x^2+1)$ (formule : $ln(f(x))' = \frac{f(x)\prime}{f(x)}$)

$$ln(x^2+1) = \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}$$
$$= \frac{2x}{x^2+1}$$

h. $(4x^3+2x-1)' = 12x^2+2$

Exercice.4

Soit f l'application définie sur R dont le tableau de variations est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	1	↗

Alors l'expression de f peut être :

$f_1(x) = \text{I}x\text{I} + 1$, le domaine de définition de cette fonction est : $Df_1 = \mathbb{R}$

On a $f_1(x) = \text{I}x\text{I} + 1 = \begin{cases} x+1 & si\ x \geq 0 \\ -x+1 & si\ x \leq 0 \end{cases}$

Donc $f_1(x)' = \begin{cases} 1 & si\ x \geq 0 \\ -1 & si\ x \leq 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -x+1 = +\infty \end{cases}$ et $f_1(0) = 1$

Tableau de variation de $f_1(x)$ est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_1(x)'$	-		+
$f_1(x)$	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

f peut-être la fonction f_1.

- $f_2(x) = e^x - x$ le domaine de définition de cette fonction est : $Df_1 = \mathbb{R}$
  - $f_2(x)' = e^x - 1$
  - $f_2(x)' = e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1$
    $\Leftrightarrow lne^x = lin1$
    $\Leftrightarrow x = 1$

$f_2(x)' \geq 0\, si\ \ x \geq 0$ et $f_2 \leq 0\, si\ \ x \leq 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_2(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x - x = +\infty$ (car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x - x = +\infty + (-\infty)$ FI

$$\lim_{x\to+\infty} e^x - x = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right)$$
$$= +\infty$$

(car $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ (d'après la règle de l'hôpital))

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = +\infty$

Le tableau de variation de $f_2(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_2(x)'$	-		+
$f_2(x)$	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

Donc f peut-être la fonction f_2.

- $f_3(x) = \frac{x^2+1}{IxI+1}$ le domaine de définition de f_3 est :

$$Df_3 = \{x \in \mathbb{R} / |x| + 1 \neq 0\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} / |x| \neq 1\}$$
$$Df_3 = \mathbb{R}$$

On a $f_3(x) = \frac{x^2+1}{IxI+1} = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x+1} & si\ x \geq 0 \\ \frac{x^2+1}{-x+1} & si\ x \leq 0 \end{cases}$

Donc $f_3(x)' = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x+1} & si\ x \geq 0 \\ \frac{x^2+1}{-x+1} & si\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x^2+1)'(x+1)-((x^2+1)(x+1)'}{(x+1)^2} & si\ x \geq 0 \\ \frac{(x^2+1)'(x+1)-((x^2+1)(x+1)'}{(-x+1)^2} & si\ x \leq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x(x+1) - 1(x^2+1)}{(x+1)^2} & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{2x(-x+1) + 1(x^2+1)}{(-x+1)^2} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Après simplification on a : $f_3(x)' = \begin{cases} \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2} & si\ x\ \geq 0 \\ \frac{-x^2+2x+1}{(-x+1)^2} & si\ x\ \leq 0 \end{cases}$

Pour $x\ \geq 0$, $\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$

$\Delta = b^2 - ac = 8 > 0 \ \Leftrightarrow x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{-2-\sqrt{8}}{2}$ et $x_2 = \frac{-2+\sqrt{8}}{2}$

$x_1 = \frac{-2-2\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = \frac{-2+2\sqrt{2}}{2}$

$x_1 = -1 - \sqrt{2}$ et $x_2 = -1 + \sqrt{2}$

Alors le tableau de variation de $f_3(x)'$:

x	$-\infty$ $\quad$ $-1-\sqrt{2}$	0	$-1+\sqrt{2}$ $\quad$ $+\infty$
$f_3(x)'$	-	-	+
$f_3(x)$		$1 \searrow$	$2-\sqrt{2} \nearrow +\infty$

D'après la comparaison des deux tableau de variations sur $[0, +\infty[$, donc f_3 ne peut pas être f .

- $f_4(x) = \sqrt{x^2+1}$. le domaine de définition de $f_4(x)$

  On a $D_{f_4} = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 \geq 0\}$

  Donc $D_{f_4} = \mathbb{R}$

$f_4(x)' = \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$ d'où $f_4(x)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f_4(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f_4(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty \end{cases}$ $\quad \begin{cases} si\ x\ \geq 0 & \Leftrightarrow\ f'_4(x)\ \geq 0 \\ si\ x\ \leq 0 & \Leftrightarrow\ f'_4(x) \leq\ 0 \end{cases}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_4(x)'$	-		+
$f_4(x)$	$+\infty \searrow$	1	$\nearrow +\infty$

Alors d'après le tableau de variation de f_4. On conclut que la fonction f peut être f_4.

- $f_5(x) = \ln(\ x^2 + 1)$

On a $D_{f_5} = \{x \in \mathbb{R}/x^2 + 1 \geq 0\}$
Donc $D_{f_5} = \mathbb{R}$
$f_5(x)' = \frac{(x^2+1)'}{\ln(x^2+1)} = \frac{2x}{\ln(x^2+1)}$ d'où $f_5(x)' = \frac{2x}{\ln(x^2+1)}$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f_5(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(\ x^2+1) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f_5(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln(\ x^2+1) = +\infty \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} si\ x \geq 0 \Leftrightarrow f'_5(x) \geq 0 \\ si\ x \leq 0 \Leftrightarrow f'_5(x) \leq 0 \end{cases}$$

Avec $f_5(0) = \ln(\ 0+1) = \ln(1) = 0$

Tableau de variation de f_5

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_5(x)'$	-		+
$f_5(x)$	$+\infty \searrow$	0	$\nearrow +\infty$

Après comparaison des deux tableau de variation, f *ne* peut pas être f_5.

Exercice 5
Trouver les extrêmes locaux et globaux de f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x - k\sqrt{x}$ où k est une constante positive.

On a $f(x) = x - k\sqrt{x}$ alors $f'^{(x)} = 1 - \frac{k}{2\sqrt{x}}$ $\forall\ x \in]0,+\infty[$
Par la suite $f'^{(x)} = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{k}{2\sqrt{x}} = 0$
$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{k}{2}$
$\Leftrightarrow x = \frac{k^2}{4}$ $\forall\ x \in]0,+\infty[$

Alors on a $f(x)' \geq 0$ si $x \geq \frac{k^2}{4}$ et $f(x)' \leq 0$ si $0 < x \leq \frac{k^2}{4}$

On trace le tableau de variation de *f* :

x	$-\infty$	$\frac{k^2}{4}$	$+\infty$
$f(x)'$	-		+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$\frac{-k^2}{4}$	↗ $+\infty$

d'après le tableau de variation, la fonction *f* admet un extremum au point A $\left(\frac{k^2}{4}, \frac{-k^2}{4}\right)$

Exercice 6

On considère la fonction *f(x)* définie comme suit :

$$\begin{cases} f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 27 \ \ pour\ x \geq 2 \\ f(x) = \dfrac{x^2-3}{x-2} \qquad\qquad pour\ x < 2 \end{cases}$$

1. Le domaine de définition de f est : $Df = \mathbb{R}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 - 15x^2 + 36x - 27 = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} = \frac{x^2-3}{x-2} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x^2-3}{x-2} = -\infty$

2. f est-elle continue au point d'abscisse 2 ?

On a $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} = \frac{x^2-3}{x-2} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} 2x^3 - 15x^2 + 36x - 27 = 1$

Puisque $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ alors f n'est pas continue au point d'abscisse 2.

3. Comportement aux extrémités de l'ensemble de définition

- on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^3-15x^2+36x-27}{x}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2x^2 = +\infty$$

Donc f admet une branche parabolique d'axe OY.

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ d'où $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x^2-3}{x-2}}{x}$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-3}{x(x-2)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-3}{x^2-2x} = 1$$

Alors $\lim_{x \to -\infty} f(x) - x = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-3}{x-2} - x = \lim_{x \to -\infty} \frac{(x^2-3)-x(x-2)}{x-2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x-3}{x-2} = 2$

Donc C_f admet une asymptote verticale d'équation *x=2.*

4. L'Etude la concavité de la fonction f revient à chercher le sens de variation de f dans son demain de définition.

$$\begin{cases} f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 27 \;\; pour\ x \geq 2 \\ f(x) = \frac{x^2-3}{x-2} \qquad pour\ x < 2 \end{cases} \quad d'où \quad \begin{cases} f(x)' = 6x^2 - 30x + 36 \;\; pour\ x \geq 2 \\ f(x) = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2} \qquad pour\ x < 2 \end{cases}$$

Par la suite :

$$f(x)'' = \begin{cases} f(x)'' = 12x - 30 \;\; pour\ x \geq 2 \\ f(x)'' = \dfrac{2}{(x-2)^3} \qquad pour\ x < 2 \end{cases}$$

- *Pour* $x \geq 2$, $f(x)'' = 12x - 30 \;\Leftrightarrow\; 12x - 30 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

On conclut donc $f(x)'' \geq 0 \;\; si \;\; x \geq \frac{5}{2}$

- *Pour* $x \leq 2 \Leftrightarrow x - 2 \leq 0$

$$\Leftrightarrow \;\; (x-2)^3 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x-2)^3} \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{(x-2)^3} \leq 0$$

x	$-\infty$ 2	5/2	$+\infty$
$f(x)''$	-	-	+
$f(x)$	Concave	Concave	Convexe

$$On\ \ a\ \begin{cases} f(x)' = 6x^2 - 30x + 36 & pour\ x \geq 2 \\ f(x) = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2} & pour\ x < 2 \end{cases}$$

$$Pour\ \ x \geq 2\ ,\ (x)' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 30x + 36 = 0$$
$$\Leftrightarrow 6(x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$\Delta = b^2 - ac = (-5)^2 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 8 > 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x_1 = \frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-(-5)+\sqrt{1}}{2}$$
$$x_1 = \frac{5-1}{2} \text{ et } x_2 = \frac{5+1}{2}$$
$$x_1 = 2 \text{ et } x_2 = 3$$

$$Pour\ \ x < 2\ \ on\ a\ \ f(x) = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - ac = (-4)^2 - 4(1)(3) = 16 - 12 = 4 > 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x_1 = \frac{-(-4)-\sqrt{4}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-(-4)+\sqrt{4}}{2}$$
$$x_1 = \frac{4-2}{2} \text{ et } x_2 = \frac{4+2}{2}$$
$$x_1 = 1 \text{ et } x_2 = 3$$

Le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		-1		1		$+\infty$
$f(x)'$		+		-				+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-1-\sqrt{2}+\ln(2+\sqrt{2})$	↘	$-\infty$		$-\infty$	↗	$+\infty$

4. Convexité, concavité

La derivée seconde de f est : $f''(x) = \left(1 + \frac{2x}{x^2-1}\right)' = \frac{2(x^2-1)-4x^2}{2(x^2-1)^2}$

Etudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction :
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$$

Dans D_f on a $f'' < 0$. On conclut que la fonction est concave séparément sur $]-\infty, -1[$ et sur $]1, +\infty[$