Correction de l'examen blanc (1)

Exercice I

On considère la fonction $f(x) = \ell n(1-2x)$.

1) La fonction ℓn n'étant définie que sur $\mathbb{R}^*{}_+$, la fonction f sera définie si $1-2x > 0$ et donc si $x < 1/2$. Le domaine de définition de f est alors $D_f =]-\infty, 1/2[$.

2) Le développement limité de $\ell n(1+x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2 est $\ell n(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$.

3) On en déduit le développement limité de $f(x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2 :

$$f(x) = \ell n(1-2x) = \ell n(1+(-2x)) = (-2x) - \frac{(-2x)^2}{2} + x^2\varepsilon(x) = -2x - 2x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

4) On a

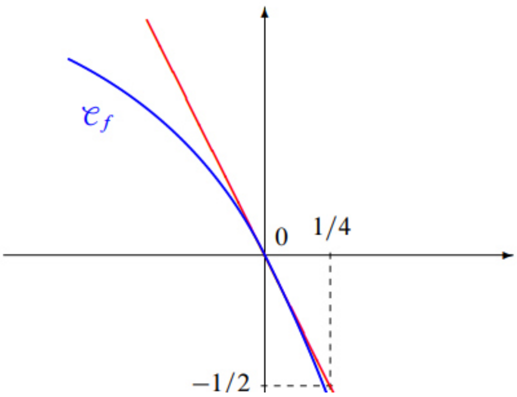
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ell n(1-2x)+2x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x-2x^2+x^2\varepsilon(x)+2x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x^2+x^2\varepsilon(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \big(-2+\varepsilon(x)\big) = -2$$

5) Faire une étude locale de la fonction $f(x)$ au voisinage de 0.

a) L'équation de la tangente T en 0 à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f est donnée par la partie affine $(ax+b)$ du développement limité. D'où $T : y = -2x$.

b) On a $f(x) - [-2x] = -2x^2 + x^2\varepsilon(x) \approx -2x^2 < 0$ lorsque x est proche de 0. La courbe $\mathcal{C}_f$ est donc située sous la tangente T.

c)



Exercice II

Soit f la fonction de deux variables définie par $f(x,y) = xy$ pour $x > 0$ et $y > 0$.

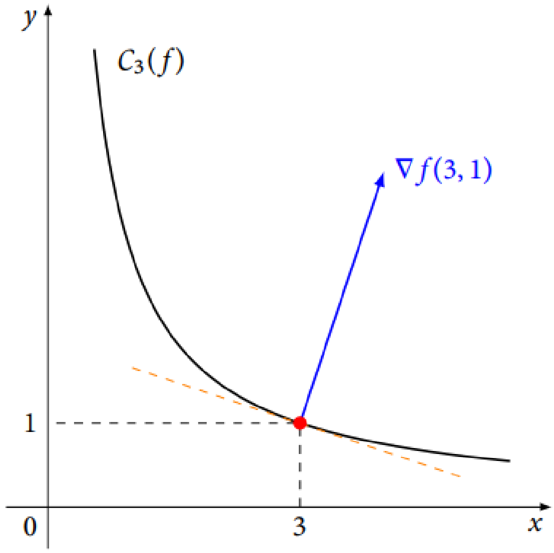
1) On a

$$f'_x(x,y) = y \qquad f'_y(x,y) = x \qquad \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \qquad \nabla f(3,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2) La courbe de niveau 3 de f est $C_3(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ : f(x,y) = 3\}$. D'où

$$f(x,y) = 3 \iff xy = 3 \iff y = \frac{3}{x} \quad x > 0$$

3) Le gradient de f en $(3,1)$ correspond au vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. D'où la représentation graphiqu



Exercice III

Soit f la fonction de deux variables définie par $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 2xy - 6x$.

1) Etude de la convexité de f

a) Les dérivés partielles de f sont

$$f'_x(x, y) = 2x - 2y - 6 \qquad f'_y(x, y) = 8y - 2x \qquad f''_{x^2}(x, y) = 2 \qquad f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = -2 \qquad f''_{y^2}(x, y) = 8$$

b) La hessienne et le hessien de f sont donc

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \qquad \det H_f(x, y) = 2 \times 8 - (-2) \times (-2) = 12$$

c) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\det H_f(x, y) = 12 \geqslant 0$, $f''_{x^2}(x, y) = 2 \geqslant 0$, $f''_{y^2}(x, y) = 8 \geqslant 0$. Donc la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}^2$.

2) Optimisation sans contrainte

a) Pour déterminer les extremums de f sur $\mathbb{R}^2$ on utilise les conditions nécessaires d'optimalité :

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 2y - 6 = 0 \\ 8y - 2x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 8y - 2y - 6 = 0 \\ x = 4y \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

La fonction f admet donc un unique point critique $(x_0, y_0) = (4, 1)$.

b) Comme la fonction f est convexe, elle admet un minimum global en $(4, 1)$. Ce minimum est $f(4, 1) = -12$