Examen blanc

Exercice I

On considère la fonction $f(x) = \ell n(1-2x)$.

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Donner le développement limité de $\ell n(1+x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2.

3) En déduire le développement limité de $f(x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2.

4) Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ell n(1-2x)+2x}{x^2}$$

5) Faire une étude locale de la fonction $f(x)$ au voisinage de 0 :

a) Déterminer l'équation de la tangente T en 0 à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f.

b) Etudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la tangente T.

c) Sur un même graphique, représenter la fonction f au voisinage de 0 ainsi que la tangente T.

Exercice II

Soit f la fonction de deux variables définie par $f(x,y) = xy$ pour $x > 0$ et $y > 0$.

1) Calculer les dérivées partielles (premières) de f. En déduire le gradient de f au point $(3,1)$.

2) Déterminer la courbe de niveau 3 de f. En faire une représentation graphique.

3) Représenter le gradient de f en $(3,1)$ sur le graphique précédent.

Exercice III

Soit f la fonction de deux variables définie par $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 2xy - 6x$.

1) Etude de la convexité de f

a) Calculer les dérivées partielles premières et secondes de f.

b) Former la hessienne et calculer le hessien de f.

c) En déduire que f est convexe sur $\mathbb{R}^2$.

2) Optimisation sans contrainte

a) Déterminer le(s) extremum(s) de f sur $\mathbb{R}^2$.

b) Préciser la nature du ou des extremums (minimum ou maximum, local